

# DISTRIBUIÇÕES E ESTATÍSTICAS CONJUNTAS DA ALTURA E PERÍODO DE ONDAS OCEÂNICAS NA COSTA OESTE PORTUGUESA

**António Alberto Pires Silva**

Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico

Av. Rovisco Pais 1049-001, Lisboa

**Oleg Makarynsky<sup>1</sup>**

Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico

Av. Rovisco Pais 1049-001, Lisboa

## SUMÁRIO

Na presente comunicação, apresenta-se um estudo de distribuições e estatísticas conjuntas da altura e do período de ondas de gravidade geradas pelo vento na superfície livre do mar. As séries de alturas e períodos, associados ao conceito de onda individual, foram obtidas por aplicação do critério de cruzamento de zero ascendente (c-z-a) e um novo critério, anteriormente apresentado e designado por critério orbital, em registos de agitação medidos ao largo da Figueira da Foz por bóia ondógrafo. Este último critério apoia-se na representação no plano complexo de uma série temporal e na transformada de Hilbert.

Avaliou-se a influência, na caracterização estatística conjunta de curto prazo das alturas e dos períodos das ondas do mar, dos critérios de definição de ondas discretas em processos estocásticos contínuos.

Probabilidades conjuntas empíricas, obtidas com os dois critérios, foram comparadas com os resultados previstos pelo modelo de *Longuet-Higgins* (1983).

## INTRODUÇÃO

O movimento da superfície livre do mar devido à acção do vento apresenta características aleatórias. Com efeito, o estado do mar, observado num determinado local, é o resultado da conjugação de múltiplos factores com origem num processo complexo de interacção oceano-atmosfera, com transferência de quantidade de movimento e energia entre o escoamento turbulento do ar e a referida superfície, seguido da propagação não linear e dispersiva destas perturbações sujeitas a condições aos limites transientes e de difícil especificação. Deste modo, a descrição mais apropriada para este tipo de fenómeno é de natureza estatística. Em escalas temporais de curto prazo e localizadas no espaço, o movimento assim caracterizado pode ser representado, sob certas hipóteses simplificativas como sejam a linearidade e a estacionariedade (*Pires Silva*, 1995), por um processo estocástico Gaussiano.

---

<sup>1</sup> Odessa Hydrometeorological Institute, Ucrânia – Actualmente bolseiro NATO de pós-doutoramento no IST

A investigação relacionada com estatísticas e distribuições da altura de onda tem suscitado significativa atenção nos últimos anos, existindo já um apreciável conjunto de estudos e resultados, incluindo dados de campo e laboratório e simulações numéricas. Como consequência, os modelos analíticos com elas relacionadas alcançaram um nível de sedimentação satisfatório.

Pelo contrário, a investigação ligada à caracterização estatística do período de onda e a as distribuições conjuntas não tem provocado o mesmo grau de esforço. Uma maior incidência de estatísticas da altura de onda nos critérios e variáveis de projecto, e maior dificuldade conceptual na solução analítica da função de densidade de probabilidade (f.d.p.) conjunta, concorreram para este facto. Todavia, o cálculo de forças associadas a ondas de mar, a avaliação da fadiga em estruturas expostas à agitação marítima e a descrição estatística da rebentação, são exemplos de situações que exigem o conhecimento das propriedades da f.d.p. conjunta da altura e do período.

Qualquer que seja o tipo de sistema de medição, todos eles registam basicamente uma série temporal da elevação da superfície livre do mar. Ora as variáveis com aplicação directa em muitas utilizações, especialmente no dimensionamento e projecto em obras de Engenharia Costeira e Oceânica, são a altura da onda e, em menor grau, o período, ou mais precisamente as estatísticas associadas. Mas estas variáveis não constituem grandezas observáveis. São inferidas a partir dos referidos registos da superfície do mar. Se estes registos fossem de um movimento sinusoidal puro não haveria dificuldade nem ambiguidade em definir altura e período da onda e assim passar de uma observação contínua para uma série de valores discretos. Mas em situações de mar real o conceito de onda regular deixa de ter sentido bem como as definições que lhe estão associadas. É pois necessário introduzir critérios de discretização com o propósito de seleccionar ondas individuais nas séries temporais de valores aleatórios. Estes critérios, de que são exemplo os critérios de crista a crista, cruzamento de zero ascendente (c-z-a) e cruzamento de zero descendente (c-z-d), baseiam-se em variáveis aleatórias associadas com o processo estocástico gaussiano, que no entanto não seguem uma distribuição normal, como sejam a envolvente, os máximos e os cruzamentos de nível.

A escolha do critério de definição afecta as características das ondas discretas e implica uma relação particular entre as estatísticas temporais e os momentos espectrais. Este último aspecto é particularmente relevante no contexto das formulações das distribuições conjuntas da altura e do período. Como é sublinhado por diversos autores (e.g. *Sobey*, 1992) e evidenciado nas secções seguintes, as hipóteses adoptadas para definir o período, e relacioná-lo com a fase total da envolvente, determinam a forma das f.d.p. conjuntas.

Em *Pires Silva e Medina* (1994a) e *Giménez et. al.* (1994a) foi apresentado um novo critério de selecção de acontecimentos discretos em realizações de processos estocásticos, designado por critério orbital. Esta nova metodologia apoia-se na representação no plano complexo de uma série temporal e na transformada de Hilbert.

A onda orbital define-se como o acontecimento compreendido entre dois cruzamentos consecutivos da parte negativa do eixo imaginário, que correspondem a um avanço de  $2\pi$  da fase total do vector girante no plano complexo. As ondas que não estão associadas a avanços de  $2\pi$  são consideradas ondas falsas. A Figura 1 apresenta um exemplo da representação complexa de uma onda falsa, observada num registo de elevações medido pela bóia ondógrafo. A onda falsa indentifica-se com o lacete na parte positiva do eixo imaginário. Ao descrevê-la o vector girante no plano complexo aumentou e diminuiu a fase total. O que equivale a dizer que a frequência local instantânea mudou de sinal, ou que houve um reverso de fase.

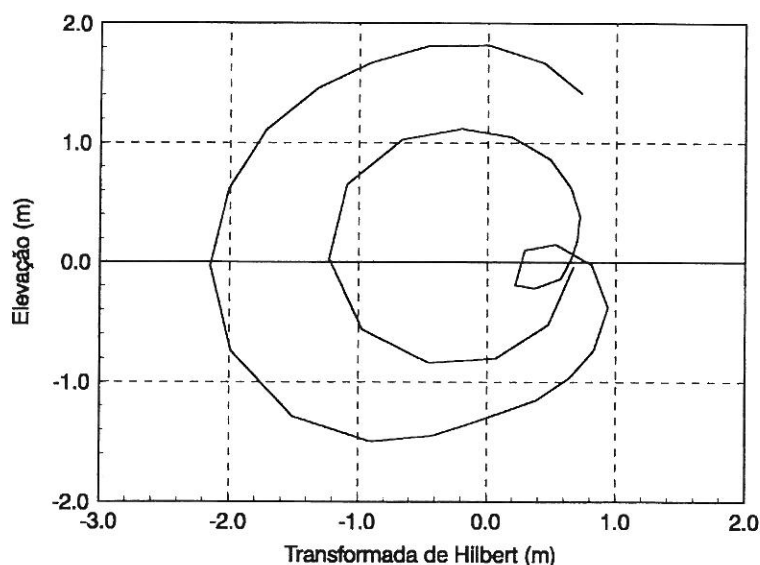


Figura 1. Representação no plano complexo de parte de um registo de bóia ondógrafo.

As implicações do critério orbital na caracterização estatística da agitação marítima foram avaliadas por *Pires Silva e Medina (1994b)*, no que diz respeito a grupos de ondas, e *Pires Silva e Medina (1996)*, no respeitante a distribuições e estatísticas de alturas de ondas. Foi concluído que a referida caracterização pode ser afectada pela escolha do critério de discretização, especialmente a estimativa do coeficiente de correlação entre alturas de ondas consecutivas, no primeiro caso, e a estimativa temporal da altura significativa, no segundo caso. A estimativa orbital deste parâmetro é cerca de 3% a 5% superior à estimativa c-z-a, exibindo uma melhor concordância com a estimativa espectral  $H_{m0}$ . *Giménez et. al. (1994b)*, analisando registos simulados numericamente, apresentaram conclusões semelhantes.

No que diz respeito às distribuições e estatísticas marginais do período, (*Pires Silva e Medina, 1997a*) concluíram que a probabilidade de excedência de períodos orbitais apresenta melhor concordância em relação à expressão que se obtém por marginalização da distribuição conjunta de *Longuet-Higgins (1983)*, do que a distribuição empírica de períodos c-z-a.

Já no referente a estatísticas de grupos de ondas extremos (duração máxima e duração do grupo que contém a onda de altura máxima), a mencionada escolha revela-se praticamente irrelevante (*Pires Silva e Medina, 1997b*).

Neste trabalho, estimaram-se probabilidades empíricas e estatísticas conjuntas da altura e do período usando os critérios c-z-a e orbital, em registos de agitação obtidos por uma bóia ondógrafo ao largo da Figueira da Foz. O primeiro propósito do estudo é comparar estas duas estimativas e avaliar como a presença de ondas falsas pode, eventualmente, afectar a caracterização estatística. O segundo objectivo consiste na comparação entre as estatísticas e as distribuições empíricas, obtidas com os dois critérios, com os resultados previstos pelo modelo de *Longuet-Higgins (1983)*.

## DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DA ALTURA E DO PERÍODO

As duas formulações da f.d.p. conjunta mais usadas foram propostas por *Longuet-Higgins (1975, 1983)* e *Cavanié et. al. (1976)*. Elas são baseadas na distribuição conjunta da envolvente, da fase e das primeiras derivadas temporais destas grandezas, no primeiro caso, e na distribuição conjunta das cristas e respectivas segundas derivadas, no segundo caso. Uma

revisão deste assunto pode ser encontrada em *Srokosz e Challenor (1987)*, *Sobey (1992)* e *Pires Silva (1995)*.

*Longuet-Higgins (1983)* retomou e estendeu a formulação de 1975. Ambas apoiam-se na teoria de *Rice (1944, 1945)* sobre distribuição conjunta e estatísticas da envolvente e fase mas diferem nas hipóteses feitas para relacionar o período de uma onda individual com a derivada temporal da fase.

Associada à série de elevações  $\eta(t)$  pode definir-se uma representação complexa, designada por função ou sinal analítico, de que naturalmente a série medida constitui a parte real, dada por

$$z(t) = \eta(t) + i\hat{\eta}(t). \quad (1)$$

A parte imaginária de (1) é a transformada de Hilbert, o que vai conferir à envolvente e fase, a seguir definidas, propriedades de interesse (*Pires Silva, 1995*),

$$\hat{\eta}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2)$$

Na indeterminação que figura em (2) toma-se o valor principal de Cauchy.

A função analítica  $z(t)$  pode ser escrita como

$$z(t) = A(t) e^{i\chi(t)}, \quad (3)$$

em que  $A(t)$ , o módulo da função complexa, representa a envolvente e  $\chi(t)$  a fase total dados por

$$A(t) = \sqrt{\eta^2(t) + \hat{\eta}^2(t)}, \quad (4)$$

$$\chi(t) = \arctg \frac{\hat{\eta}(t)}{\eta(t)}. \quad (5)$$

A fase total é decomposta num termo linear, proporcional à frequência  $f_{01}$ , e num termo aleatório

$$\chi(t) = 2\pi f_{01}t + \psi(t). \quad (6)$$

A variação  $\Delta\chi$ , que corresponde a um  $\Delta t$  de um período, tem de valer  $2\pi$ . Desenvolvendo  $\Delta\chi$  em série de Taylor obtém-se

$$2\pi = \chi(t_0 + T) - \chi(t_0) \approx \dot{\chi}(t_0)T + \frac{1}{2}\ddot{\chi}(t_0)T^2 + \dots \quad (7)$$

Conservando apenas o termo de primeira ordem, o que equivale a considerar  $\ddot{\psi} \ll 2\pi f_{01}\dot{\psi}$ , e portanto  $\dot{\psi}$  varia pouco ao longo de um período, tem-se

$$T \approx \frac{2\pi}{\dot{\psi} + 2\pi f_{01}}, \quad (8)$$

Está assim obtida a relação entre a derivada da fase e o período local que permite passar da f.d.p. conjunta da amplitude e derivada da fase para a amplitude e o período. Em variáveis adimensionais esta escreve-se

$$p(\xi, \tau) = \frac{2L(v)}{v\sqrt{\pi}} \frac{\xi^2}{\tau^2} \exp\left\{-\xi^2 \left[1 + \frac{(1-1/\tau)^2}{v^2}\right]\right\}, \quad (9)$$

em que  $\xi = R/\sqrt{2m_0}$  e  $\tau = T/T_{01}$ .  $R$  é a amplitude da onda e  $T$  o período.  $L(v)$  é um factor de normalização e vale

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{2} \left[1 + (1 + v^2)^{-1/2}\right]. \quad (10)$$

Nas expressões acima indicadas  $v$  é o parâmetro de largura espectral introduzido por *Longuet-Higgins* (1975), e definido por

$$v = \left[ \left( m_0 m_2 / m_1^2 - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (11)$$

Esta f.d.p. não apresenta qualquer eixo de simetria. Na Figura 2 apresentam-se exemplos da expressão (9), normalizada por  $p_{\max}$ , para diferentes valores de  $v$ . O momento de ordem mais elevada que intervém na sua definição é  $m_2$ , através de  $v$ . Como se constata da Figura 2 a assimetria aumenta com  $v$ . Todavia, para valores de  $\xi \geq 1.5$  a assimetria não se faz sentir e os períodos distribuem-se simetricamente em torno de  $\tau = 1.0$ . A moda desta distribuição é inversamente proporcional a  $v$ , assim como o respectivo valor máximo e os seus valores são dados por

$$\xi = 1/(1 + v^2)^{1/2} \quad \tau = 1/(1 + v^2) \quad p_{\max} = 0.415(v + v^{-1})L(v). \quad (12)$$

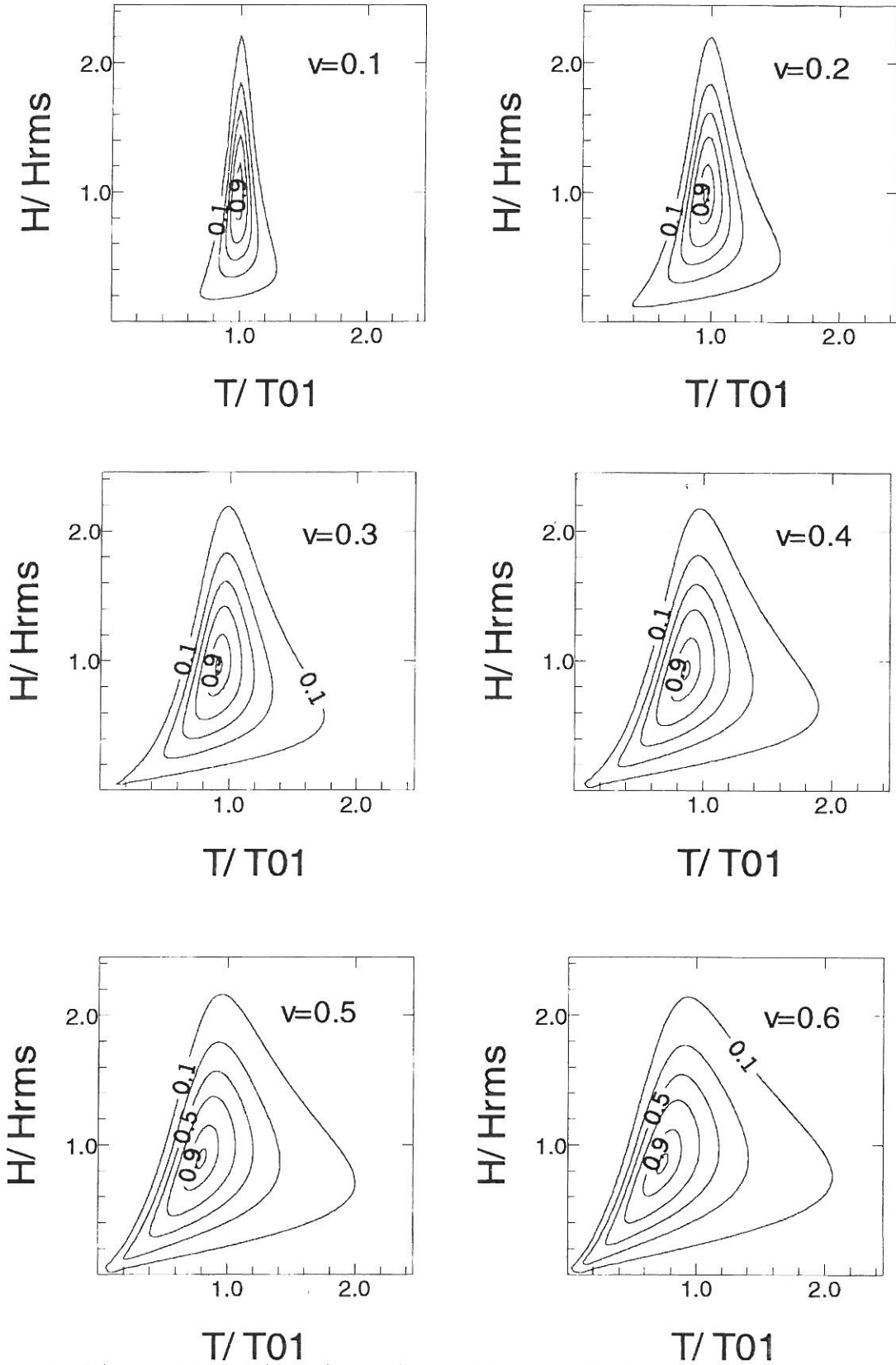


Figura 2. Isolinhas da f.d.p. conjunta de acordo com (9), e normalizadas por  $p_{max}$ . A isolinha mais interior corresponde a 0.99.

## DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Os registos de agitação marítima usados neste estudo provieram de uma série de observações de Abril de 1984 a Junho de 1986, recolhidos pelo Instituto Hidrográfico com uma bóia ondógrafo tipo "waverider". A bóia está fundeada ao largo da Figueira da Foz, numa sonda reduzida de 92 m. Deste conjunto de medições foram escolhidos 31 registos com 5226 ondas c-z-a e 4695 ondas orbitais. Na comparação que se apresenta, todas as alturas e todos os períodos estimados, c-z-a ou orbitais, foram adimensionalizados por  $H_{rms} = 2 \times (2m_0)^{1/2}$  e por  $T_{01}$ , respectivamente.

As expressões (9) e (10) envolvem o parâmetro  $v$ , que foi calculado a partir dos espectros observados, usando a expressão (11). O Quadro 1 indica o valor médio, bem como os percentis 10 e 90 nos 31 registos.

Quadro 1. Valor médio e percentis 10 e 90 de  $v$

	Valor Médio	Percentil 10	Percentil 90
$v$	0.49	0.38	0.61

Estes valores são semelhantes a outros obtidos com dados de campo por vários autores, de que são exemplo (todos provenientes de medições com bóia tipo "waverider"): *Goda* (1978) com  $v = 0.51$  (média de 13 registos medidos ao largo das costas do Japão), *Srokozs e Challenor* (1987) com  $v = 0.49$  e  $v = 0.52$  (dois registos de 12 h e 8,5 h de duração, respectivamente, medidos ao largo das ilhas Scilly) e *Srokozs* (1988) com  $v = 0.39$  (média de sete registos medidos ao largo das ilhas Scilly).

Foram ensaiados dois valores para as dimensões das células da distribuição empírica conjunta. Estas dimensões representam, habitualmente, um compromisso entre resolução e o número de contribuições nas células de menor densidade. O primeiro valor adoptado foi de  $\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.1$  que, juntamente com uma interpolação linear na construção das isolinhas de igual probabilidade, conduziu às três figuras seguintes. A Figura 3 apresenta a f.d.p. conjunta empírica, estimada com os dois critérios.

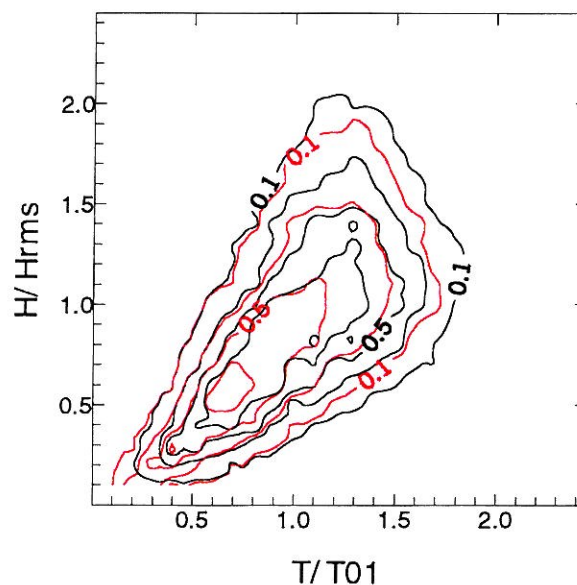


Figura 3. Função densidade de probabilidade empírica conjunta da altura e do período, estimada com os critérios orbital (linhas a negro) e c-z-a (linhas a vermelho).

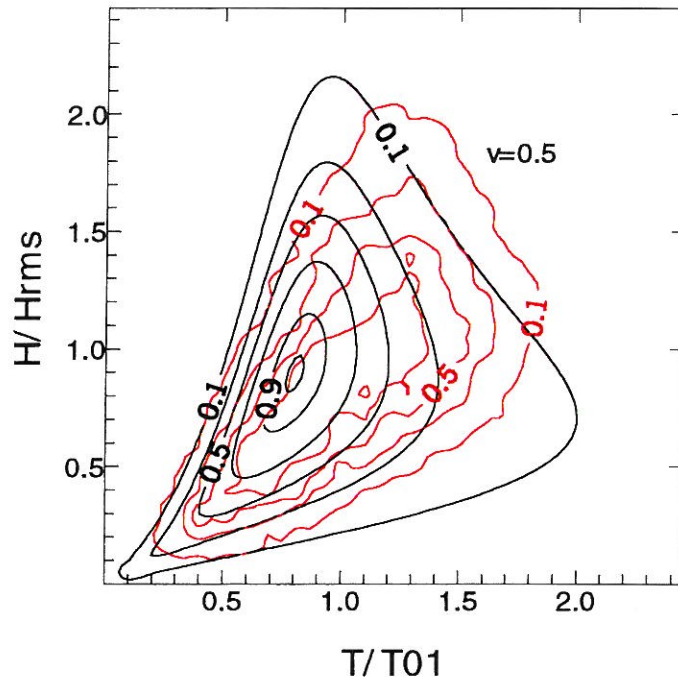


Figura 4. Função densidade de probabilidade empírica conjunta da altura e do período estimada com critério orbital (vermelho) e a expressão de Longuet-Higgins (1983).

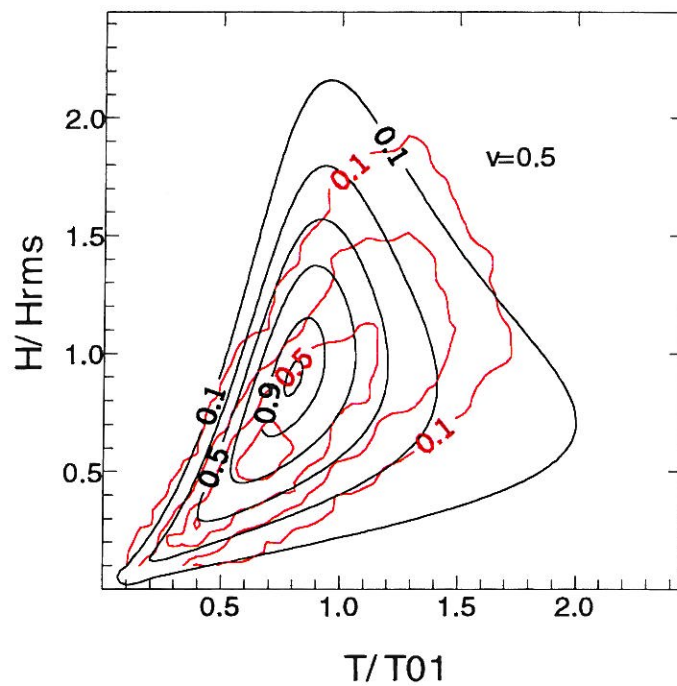


Figura 5. Função densidade de probabilidade empírica conjunta da altura e do período estimada com critério c-z-a (vermelho) e a expressão de Longuet-Higgins (1983).



As Figuras 4 e 5 representam a comparação entre a f.d.p. conjunta, estimada com os critérios orbital e c-z-a, respectivamente, e o modelo de *Longuet-Higgins* (1983), a equação (9).

Na Figura 3 observa-se um desvio positivo das ondas orbitais em relação às ondas c-z-a nas gamas superiores das alturas e dos períodos, como resultado da eliminação de ondas falsas. Estas, que são predominantemente ondas pequenas, afectam o número relativo de ondas com alturas e períodos elevados. Nas gamas referidas, as isolinhas a negro encontram-se por fora das isolinhas a vermelho. A estimativa orbital exhibe uma crista central longa e relativamente larga.

As Figuras 4 e 5 mostram que, em linhas gerais, a forma triangular arredondada do modelo teórico é alcançada pelas estimativas empíricas, em particular a assimetria anteriormente mencionada. Na zona das alturas e períodos menores a concordância de qualquer das estimativas empíricas é semelhante. No entanto, na zona central as ondas orbitais apresentam uma melhor aproximação em relação a (9) do que as ondas c-z-a.

O valor das dimensões das células usado nas três figuras anteriores implica um traçado algo irregular das isolinhas da f.d.p. conjunta. Se bem que importante para realçar algumas características mais finas das distribuições empíricas, este facto torna a comparação, em particular com o modelo teórico, mais difícil. Deste modo, ensaiou-se um segundo valor para  $\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.2$  que, em conjunto com uma técnica de Kringing de interpolação na elaboração das citadas isolinhas, originou as três figuras seguintes. A Figura 6 apresenta uma segunda perspectiva da f.d.p. conjunta empírica, estimada com os dois critérios.

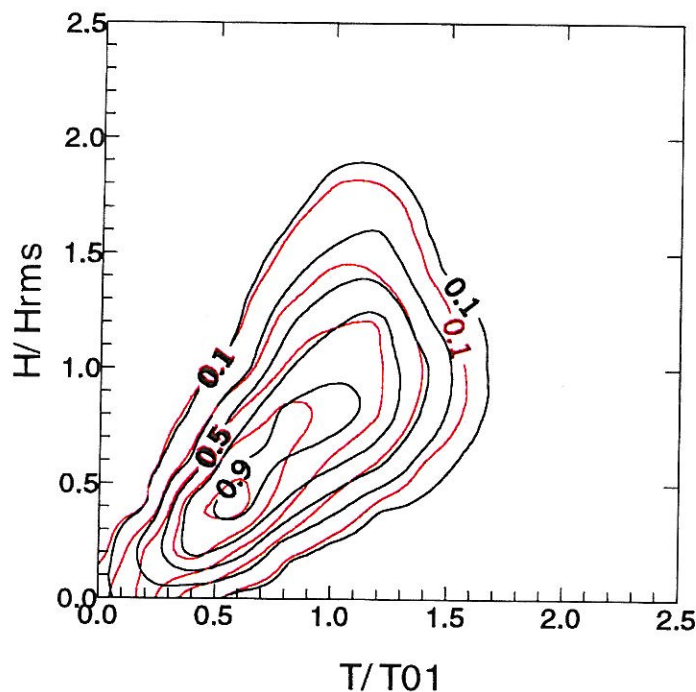


Figura 6. F.d.p. empírica conjunta da altura e do período estimada com os critérios orbital (linhas a negro) e c-z-a (linhas a vermelho).  $\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.2$  e técnica de interpolação Kringing.

As considerações expressas acerca da Figura 3, em particular a existência de uma crista central longa e moderadamente larga na estimativa orbital em contraste com a estimativa c-z-a, aplicam-se à Figura 6.

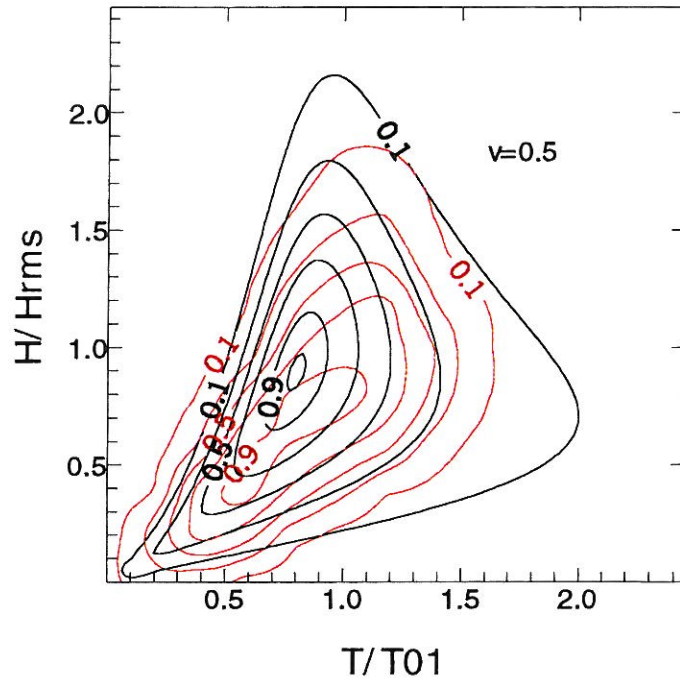


Figura 7. Função densidade de probabilidade empírica conjunta da altura e do período estimada com critério orbital (vermelho) e a expressão de *Longuet-Higgins* (1983).  $\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.2$  e técnica de interpolação Kringing.

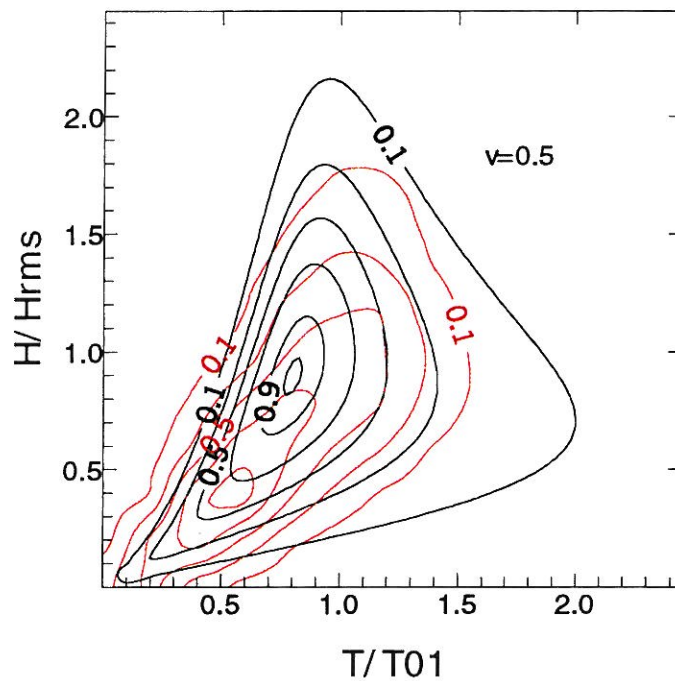


Figura 8. Função densidade de probabilidade empírica conjunta da altura e do período estimada com critério c-z-a (vermelho) e a expressão de *Longuet-Higgins* (1983).  $\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.2$  e técnica de interpolação Kringing.

As Figuras 7 e 8 reforçam as ilações extraídas a propósito das Figuras 4 e 5. Em particular, a estimativa orbital apresenta um padrão junto ao máximo da f.d.p. que se aproxima mais do modelo teórico do que a estimativa c-z-a. Esta última falha totalmente na localização da moda da distribuição.

Este aspecto é posto em evidência não só com a localização, mas também com o cálculo do valor máximo da f.d.p. O Quadro 2 apresenta a comparação entre estes valores, obtidos das f.d.p. empírica conjuntas (orbital e c-z-a), e a previsão do modelo de *Longuet-Higgins* (1983),  $p_{max}$  na expressão (12). As estimativas empíricas vão estar dependentes das dimensões adoptadas para as células. Assim, apresentam-se os correspondentes valores calculados para cada escolha feita.

Quadro 2. Estimativas empíricas (orbital e c-z-a) de  $p_{max}$  e a previsão teórica ( $v = 0.5$ ).

	c-z-a	orbital	<i>Longuet-Higgins</i> (1983) $v = 0.5$
$\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.1$	1.818	1.321	<b>1.096</b>
$\Delta(H/H_{rms}) = \Delta(T/T_{01}) = 0.2$	1.435	1.145	

Em relação à referida previsão de  $p_{max}$ , a estimativa c-z-a envolve um erro que varia entre 31% e 66%, enquanto o respectivo erro para a estimativa orbital está compreendido entre 4,5% e 21%. Note-se que *Longuet-Higgins* (1983), ao analisar os dados de *Goda* (1978) indica um erro de 24% para este mesmo valor de  $v = 0.5$ .

## APRECIACÕES FINAIS

Calcularam-se e compararam-se estatísticas e distribuições conjuntas de alturas e de períodos de ondas de mar, estimadas com os critérios c-z-a e orbital. Esta última metodologia, de definição de ondas individuais, baseia-se na representação no plano complexo e na transformada de Hilbert, e está associada a um paradigma novo para os critérios de definição atrás citados (*Pires Silva*, 1995).

Em termos gerais, o padrão exibido pelas isolinhas da f.d.p. do modelo teórico de *Longuet-Higgins* (1983) é seguido pelas f.d.p. empíricas, em particular a ausência de qualquer eixo de simetria é notória. Todavia, na zona central as ondas orbitais apresentam uma melhor aproximação em relação ao referido modelo do que as ondas c-z-a. A existência de uma crista longa e relativamente larga nas estimativas orbitais proporciona uma localização da moda da f.d.p. superior em relação às ondas c-z-a.

O erro na estimativa de  $p_{max}$  associado às ondas orbitais não ultrapassa 21%, enquanto a estimativa c-z-a pode alcançar 66%.

Estas conclusões estão de acordo com anteriores resultados relativos ao confronto entre os dois critérios de definição, em especial no que concerne a estatísticas e distribuições marginais do período (*Pires Silva e Medina*, 1997a).

O modelo proposto por *Longuet-Higgins* (1983) afigura-se com capacidade para representar as estatísticas de curto prazo da agitação marítima. No entanto, alguns valores calculados de  $v$  são algo elevados e, porventura, fora do domínio de validade da teoria ( $v^2 \leq 0.36$ ).

## BIBLIOGRAFIA

- Cavanié, A., Arhan, M. e Ezraty, R. (1976), A Statistical Relationship Between Individual Heights and Periods of Storm Waves, *Proc. 1<sup>o</sup> Int. Conf. on Behaviour of Offshore Struct. (BOSS'76)*, 354-360.
- Giménez, M.H., Sánchez-Carratalá, C.R. e Medina, J.R. (1994a), Analysis of False Waves in Numerical Sea Simulations, *Ocean Engng.*, 21(8), 751-764.
- Giménez, M.H., Sánchez-Carratalá, C.R. e Medina, J.R. (1994b), False Waves in Wave Records and Numerical Simulations, *Proc. 24<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Engng.*, Kobe-Japan, 192-206.
- Goda, Y. (1978), The Observed Joint Distribution of Periods and Heights of Ocean Waves, *Proc. 16<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Engng.*, Sydney-Australia, 227-246.
- Longuet-Higgins, M.S. (1975), On the Joint Distribution of the Periods and Amplitudes of Sea Waves, *J. Geophys. Res.*, 80(18), 2688-2694.
- Longuet-Higgins, M.S. (1983), On the Joint Distribution of Wave Periods and Amplitudes in a Random Wave Field, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 389, 241-258.
- Pires Silva, A.A. (1995), *Ondas de Superfície Geradas pelo Vento. Um Novo Critério de Definição*, Tese de Doutoramento, IST.
- Pires Silva, A.A. e Medina, J.R. (1994a), False Waves in Wave Records, *Ocean Engng.*, 21(8), 765-770.
- Pires Silva, A.A., e Medina, J.R. (1994b), A New Criterion of Defining Discrete Waves and the Estimation of Wave Group Statistics, *Proc. Int. Symp. on Waves - Physical and Numerical Modelling*, IAHR, Vancouver, 842-851.
- Pires Silva, A.A. e Medina, J.R. (1996), Distribution of Sea Wave Heights: Effects of a New Criterion of Defining Discrete Waves, *Proc. 15<sup>th</sup> Int. Conf. Offshore Mech. and Artic Engng. (OMAE 96)*, Florence, Offshore Techn. vol I, part A, 33-40.
- Pires Silva, A.A. e Medina, J.R. (1997a), The Orbital Criterion of Defining Discrete Waves and its Relationship with Sea Wave Periods, *Proc. 3<sup>o</sup> Int. Conf. on Ocean Wave Measurement and Analysis (WAVES 97)*, Virginia Beach, Virginia, ASCE, vol. 1, 122-136.
- Pires Silva, A.A. e Medina, J.R. (1997b), Statistics of Maximum and Conditional Run of Sea Wave Groups in the Portuguese West Coast, *Proc. 27<sup>o</sup> Congress Int. Association for Hydraulic Research (IAHR 97)*, San Francisco, B, vol. 2, 1340-1345.
- Rice, S.O. (1944-1945), Mathematical Analysis of Random Noise, *Bell Syst. Tech. J.*, 23, 282-332; 24, 46-156.
- Sobey, R.J. (1992), The Distribution of Zero-Crossing Wave Heights and Periods in a Stationary Sea State, *Ocean Engng.*, 19(2), 101-118.
- Srokosz, M.A. (1988), A Note on the Joint Distribution of Wave Height and Period During the Growth Phase of a Storm, *Ocean Engng.*, 15(4), 379-387.
- Srokosz, M.A. e Challenor, P.G. (1987), Joint Distributions of Wave Height and Period: A Critical Comparison, *Ocean Engng.*, 14(4), 295-311.