

# MODELOS NUMÉRICOS DE PROPAGAÇÃO DE ONDAS MARÍTIMAS

## VALIDADE DA APROXIMAÇÃO LINEAR

L. Gil\*, J. Fortes\*\*, E. Didier\*

\*Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL, DEMI, 2829-516 Monte de Caparica.

\*\* LNEC, Av. do Brasil, 101, 1700-066 Lisboa

lmg@fct.unl.pt, jfortes@lnec.pt, deric@fct.unl.pt

### RESUMO

Nesta comunicação, descrevem-se os modelos linear, DREAMS, Fortes (1993), e não-linear, CANAL, Clement (1992) e Gil (1999), que simulam a propagação de ondas marítimas em fundos de profundidade variável.

DREAMS é um modelo linear que resolve a equação de declive suave, Berkhoff (1972), pelo método dos elementos finitos. Esta equação descreve os efeitos combinados da refração e difracção de ondas monocromáticas propagando-se em fundos de declive suave como os que existem em portos, baías e restantes zonas costeiras. CANAL é um modelo não-linear que resolve numericamente a equação de Euler através de um método de elementos de fronteira recorrendo a uma técnica de singularidades.

Estes modelos numéricos são aplicados a situações típicas de fundos arenosos de inclinação variável. Testam-se diferentes inclinações de fundo e características das ondas incidentes. A comparação entre os resultados numéricos dos dois modelos e os resultados analíticos permite avaliar a importância dos termos não-lineares e assim estimar o erro cometido na aproximação linear. O modelo não-linear permite ainda estudar a influência da amplitude da onda na evolução dos índices de agitação.

### 1. INTRODUÇÃO

A caracterização da agitação marítima junto à costa ou no interior de zonas abrigadas é de primordial importância em engenharia costeira e portuária. A aquisição de dados, nomeadamente através de bóias-ondógrafos, permite caracterizar o clima de agitação na zona de interesse, embora por razões económicas ou de escassez de meios, nem sempre seja possível ter dados de campo onde se pretende. Normalmente, as informações disponíveis dizem respeito a posições afastadas da linha de costa. Nesse caso, modelos físicos em escala reduzida ou modelos numéricos tornam-se ferramentas imprescindíveis, pois permitem simular a propagação das ondas até à zona em estudo e assim estimar as características da agitação relevantes para o planeamento, projecto, construção e manutenção de obras de abrigo e de protecção costeira.

Na simulação numérica da propagação da agitação marítima em zonas portuárias e costeiras é frequente a utilização de códigos numéricos baseados em formulações lineares, das quais se salienta a formulação baseada na equação de declive suave, Berkhoff (1972). Esta equação permite descrever os efeitos lineares combinados da refração, difracção e reflexão e assim simular a transformação das ondas. No entanto, sendo a equação de Berkhoff obtida a partir da teoria linear das ondas não permite evidentemente a simulação de qualquer efeito não-linear, como os que se fazem sentir em águas pouco profundas ou na zona de rebentação. À medida que as ondas se propagam para profundidades menores sofrem alterações muito significativas em distâncias da ordem do seu comprimento de onda. Verifica-se uma progressiva assimetria do perfil da onda, um estreitar das cristas e um achatamento das cavas. Estes efeitos, associados às variações da batimetria e às interações entre ondas ou às interações entre ondas e correntes, levam a significativas transferências de energia entre componentes espectrais. A geração harmónica e as modificações do perfil da

onda com a profundidade, (do ponto de vista dos modelos matemáticos, estas alterações correspondem à modificação da onda de Stokes em onda cnoidal) não são assim considerados nos modelos lineares.

Nesta comunicação, pretende-se comparar simulações da propagação de ondas em fundos inclinados obtidas por dois modelos numéricos distintos:

- o código "CANAL" - Clement (1992) e Gil (1999) - que é totalmente não-linear e resolve numericamente a equação de Euler através do método de elementos de fronteira;
- o código "DREAMS" - Fortes (1993) - que é linear e resolve numericamente a equação elíptica de declive suave através do método de elementos finitos.

Os dois modelos numéricos são aplicados num canal que contém uma zona cuja profundidade varia linearmente situada entre duas zonas de profundidade constante. A inclinação da zona de profundidade variável é suave sendo testados diferentes declives de fundo. A comparação dos resultados destes dois modelos numéricos e de resultados analíticos permite identificar as vantagens e desvantagens de se utilizar cada um destes modelos. Avalia-se assim a importância dos termos não-lineares e estima-se o erro cometido na aproximação linear.

Nas secções seguintes, descrevem-se os modelos DREAMS e CANAL, apresentam-se os domínios e condições de cálculo, os resultados obtidos e a respectiva análise.

## 2. MODELOS NUMÉRICOS

### 2.1 Modelo numérico linear DREAMS

DREAMS é um modelo matemático para o cálculo da propagação e deformação de ondas regulares em zonas costeiras, Fortes (1993). O modelo pode ser aplicado no estudo, quer da penetração da agitação marítima de período curto num porto, quer da ressonância de uma marina excitada por ondas de longo período nela incidentes. É baseado na equação bidimensional de declive suave, Berkhoff (1972) e Smith e Sprinks (1975), dada por:

$$\nabla \cdot (c c_g \nabla \eta) + k^2 c c_g \eta = 0 \quad (1)$$

em que  $\eta$  é a elevação da superfície livre, função das coordenadas  $(x,y)$ ;  $c = \omega/k$ , a velocidade de fase ou celeridade da onda;  $c_g = d\omega/dk$ , a velocidade de grupo; e  $\omega$  a frequência angular da onda que se relaciona com  $k$ , o número de onda, através da relação de dispersão  $\omega^2 = gk \tanh(kh)$ .

Esta equação tem em conta os efeitos combinados da refração, difracção e reflexão e descreve a propagação de ondas monocromáticas de pequena amplitude em fundos de declive suave como os que ocorrem vulgarmente em portos, baías e restantes zonas costeiras.

Admite-se que o declive é suave quando a variação do fundo,  $\nabla h$ , num comprimento de onda,  $l$ , é pequena em relação à profundidade relativa  $(kh)$ , isto é,  $\nabla h/(kh) \ll 1$ , sendo  $h$  a profundidade do fundo. Nestas condições, e segundo a dedução da equação de declive suave por Smith e Sprinks (1975), os termos de segunda ordem proporcionais ao quadrado do declive do fundo  $(\nabla h)^2$  e à curvatura do fundo  $\nabla^2 h$  são considerados pequenos quando comparados com termos envolvendo as derivadas do potencial de velocidade. Por isso, são desprezados.

Booij (1983) comparou resultados de um modelo de elementos finitos bidimensional, baseado na equação de declive suave, com resultados de um modelo de elementos finitos tridimensional, baseado na equação de Laplace e nas condições de fronteira de fundo e de superfície livre linearizadas. Este modelo tridimensional efectua a propagação linear de ondas em fundos com qualquer declive (isto é, não admite a hipótese de declive suave). Esta

comparação foi efectuada em termos do coeficiente de reflexão para o caso de ondas monocromáticas propagando-se sobre fundos de diferentes inclinações. Booij (1983) verificou que os resultados obtidos com os dois modelos eram da mesma ordem de grandeza e que a reflexão do fundo só se torna importante para declives muito acentuados (superiores a 1/3).

Este autor concluiu ainda que a equação de declive suave pode ser aplicada em zonas de declive até 1:3, o que permite a sua utilização na generalidade dos domínios costeiros.

Há, no entanto, uma importante limitação que restringe o campo de aplicação da equação de declive suave e que resulta de esta ter sido deduzida com base na teoria linear. A equação de declive suave só é válida para ondas de pequena amplitude e números de Ursell pequenos, isto é,  $U_r \ll 1$ . De qualquer forma, na generalidade das zonas portuárias ou abrigadas, é válida a sua aplicação, podendo os seus resultados servir como condições de fronteira e iniciais para modelos baseados em formulações não-lineares que se aplicam a zonas mais restritas.

O método numérico utilizado para a resolução da equação de declive suave é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Dado o facto do modelo não apresentar qualquer limitação quanto ao ângulo de incidência da onda na entrada do domínio de cálculo, o mesmo domínio computacional pode ser utilizado para uma larga gama de direcções de onda incidente.

As condições de fronteira implementadas no modelo são as condições de radiação, que permitem a saída de perturbações geradas no domínio no sentido de propagação para o infinito, as condições de geração e radiação combinadas, como as relativas a fronteiras abertas e que permitem a entrada da agitação incidente e a saída das perturbações geradas no domínio e as condições de reflexão (total ou parcial), referentes aos contornos sólidos da zona em estudo (praias, falésias, molhes, entre outros).

O modelo calcula índices de agitação ( $H/H_0$ ), relação entre a altura de onda no ponto do domínio de cálculo,  $H$ , e a altura de onda à entrada do domínio de cálculo,  $H_0$ , ou coeficientes de amplificação (em estudos de ressonância portuária) e direcções de propagação da onda. O campo de velocidades horizontais na superfície livre e as cristas das ondas (linhas de igual fase) constituem resultados opcionais.

A validação do modelo matemático, Fortes (1993), foi feita com casos de teste clássicos da bibliografia, tais como o fundo plano inclinado, o baixio circular, os molhes semi-infinitos e a bacia rectangular de Mei e com casos de teste reais. O modelo foi também validado com base nos estudos de ressonância e agitação nos portos de Saint Quay-Portrieux, Fortes (1993) e no porto da Baleeira, tendo sido comparados, para este caso de teste, os resultados de DREAMS com resultados de outros modelos matemáticos e/ou de modelos físicos.

As principais limitações do modelo são o facto de, por ser linear, não ter em conta efeitos não-lineares, tais como a interacção de ondas e correntes, a interacção de ondas devido à topografia do fundo, a transferência de energia entre componentes de onda, a geração de componentes de baixa frequência induzidas por grupos de ondas curtas e o efeito da dispersão por amplitude da onda. O modelo também não tem em conta os efeitos da dissipação de energia por rebentação e atrito de fundo e os galgamentos sobre estruturas. Finalmente, como já foi mencionado, a sua aplicação está condicionada a fundos de declive suave, até 1:3.

## **2.2 Modelo numérico não-linear, CANAL**

O código não-linear CANAL permite simular o escoamento em regime transitório num domínio de cálculo, corresponde a um canal bidimensional de fundo inclinado, equipado com um gerador-absorvedor de onda em cada extremidade (Figura 1). Na concepção do programa o fluido supõe-se incompressível e invíscido. Os efeitos da tensão superficial foram ignorados e o escoamento admitido como irrotacional e plano. O problema é assim tratado no quadro da teoria dos escoamentos potenciais.

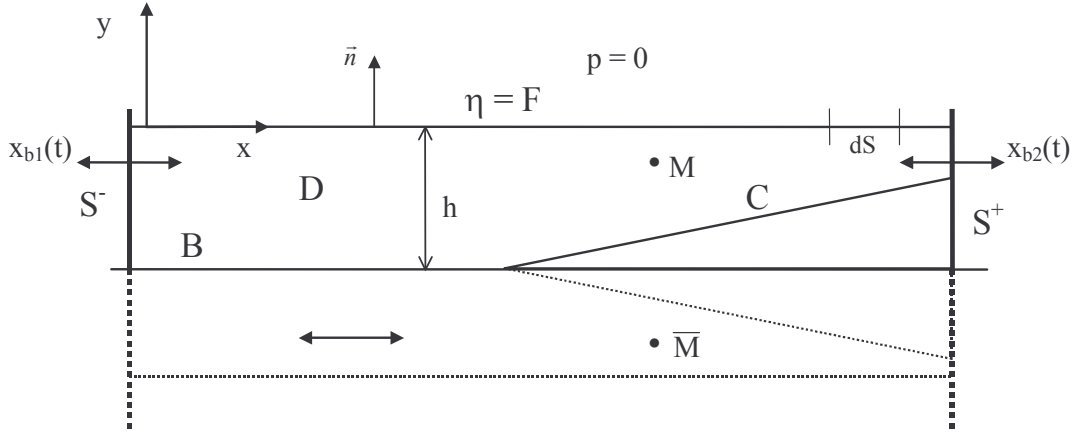


Figura 1 - Domínio de cálculo, notações e método das imagens.

Quando em funcionamento como geradores de onda, o movimento de translação dos batedores,  $x_b(t)$ , é conhecido. A pressão sobre a superfície livre é suposta constante e nula. O sistema de equações diferenciais a resolver escreve-se, de acordo com as notações apresentadas na Figura 1:

$$\nabla^2 \phi(x, y, t) = 0, \text{ para } x, y \in D, \text{ (conservação de massa)} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(x, y, t) = \frac{\partial x_b}{\partial t} \cdot \vec{n}, \text{ para } x, y \in S^- \cup S^+ \text{ (impermeabilidade nos geradores de onda)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(x, y, t) = 0, \text{ para } x, y \in B \cup C \text{ (condição de impermeabilidade no fundo)} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + gy - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \text{ para } x, y \in F \text{ (condição dinâmica de superfície livre)} \quad (5)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \text{ para } x, y \in F \cup D \text{ (condição cinemática de superfície livre)}$$

Nesta última equação, optou-se por escrever a condição cinemática de superfície livre nas direcções  $x$  e  $y$ .

As equações precedentes são adimensionalizadas procedendo às mudanças de variáveis (utilizam-se maiúsculas para identificar variáveis adimensionais) :

$$(X, Y) = \left( \frac{x}{h}, \frac{y}{h} \right) \quad (7)$$

$$T = t \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (8)$$

$$\vec{U} = \frac{\vec{U}}{\sqrt{gh}} \quad (9)$$

$$\Phi = \frac{\phi}{h\sqrt{gh}}, \quad (10)$$

o que permite escrever as equações fundamentais, utilizando a notação complexa,  $Z = X + iY$ , na forma adimensional:

$$\nabla^2 \Phi(Z, T) = 0, \text{ para } Z \in D \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}}(Z, T) = \frac{\partial X_b}{\partial T} \cdot \bar{n}, \text{ para } Z \in S^- \cup S^+ \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}}(Z, T) = 0, \text{ para } Z \in B \cup C \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)^2 \right] + Y - \frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0, \text{ para } Z \in F \quad (14)$$

$$\frac{DX}{DT} = \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \text{ para } Z \in F \cup D \quad (15)$$

$$\frac{Dy}{DT} = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}$$

O código CANAL resolve numericamente este sistema de equações diferenciais sem necessidade de outras aproximações, para além das que decorrem da necessária discretização do domínio de cálculo. Para tal, utiliza-se um método de singularidades. A função elemental de Green:

$$G(M, M') = \log \frac{|MM'|}{h} = \text{Re}[\log(Z - Z')] \quad (16)$$

é uma solução da Eq. 11 (equação de Laplace). A aplicação da terceira fórmula de Green no domínio fechado D, utilizando a normal exterior  $\bar{n}$  (Figura 1), permite escrever sobre a fronteira fechada,  $\delta D$ , do domínio D, Delhommeau (1986):

$$\alpha \Phi(M) = \int_{\delta D^-} \left[ \Phi(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n'} - G(M, M') \frac{\partial \Phi(M')}{\partial n'} \right] ds \quad (17)$$

com:

$\alpha = 0$  se M for exterior ao domínio;

$\alpha = \pi$  se M for interior ao domínio;

$\alpha$  é o ângulo entre dois segmentos consecutivos da fronteira do domínio D, se M pertencer à fronteira.

A Eq. 13 pode ser eliminada, introduzindo o "problema imagem" relativamente ao plano do fundo  $y=-h$ . A simetria desta nova geometria conduz a que a condição de impermeabilidade do fundo seja automaticamente respeitada. O potencial, deve agora ser modificado introduzindo o efeito dos pontos  $\bar{M}'$ , simétricos dos pontos  $M'$ , relativamente ao fundo do canal (Figura 1), obtendo-se a partir da Eq. 17:

$$\alpha \Phi(M) = \int_{\delta D^-} \left[ \Phi(M') D(M, M') - S(M, M') \frac{\partial \Phi(M')}{\partial n'} \right] ds \quad (18)$$

sendo  $\delta D$  a fronteira do problema inicial e do problema imagem e os coeficientes de influência  $D(M, M')$  e  $S(M, M')$  calculados por:

$$D(M, M') = \frac{\partial G(M, M')}{\partial n'} + \frac{\partial G(M, \bar{M}')}{\partial n'} \quad (19)$$

$$S(M, M') = G(M, M') + G(M, \bar{M}'). \quad (20)$$

Esta modificação do potencial permite calcular automaticamente o efeito do problema imagem.

Dependendo da posição do ponto M a Eq. 18 toma duas formas:

$$\begin{aligned} & \int_{S^+ \cup S^-} \Phi(M') D(M, M') ds - \int_F S(M, M') \frac{\partial \Phi(M')}{\partial n'} ds = \\ & = \alpha \Phi(M) - \int_F \Phi(M') D(M, M') ds + \int_{S^+ \cup S^-} S(M, M') \frac{\partial \Phi(M')}{\partial n'} ds, \text{ se } M \in F \end{aligned} \quad (21)$$

e:

$$\begin{aligned} & \int_{S^+ \cup S^-} \Phi(M') D(M, M') ds - \int_F S(M, M') \frac{\partial \Phi(M')}{\partial n'} ds - \alpha \Phi(M) = \\ & = - \int_F \Phi(M') D(M, M') ds + \int_{S^+ \cup S^-} S(M, M') \frac{\partial \Phi(M')}{\partial n'} ds, \text{ se } M \in S^+ \cup S^-. \end{aligned} \quad (22)$$

Os termos desconhecidos e conhecidos foram colocados, respectivamente, nos primeiros e segundos membros das equações. Sobre a superfície livre, o potencial  $\Phi$  é conhecido e a velocidade normal ( $\partial\Phi/\partial n$ ) desconhecida, o que corresponde a uma condição de Dirichlet. Nas superfícies sólidas a velocidade normal é conhecida e o potencial desconhecido, o que corresponde a uma condição de Neumann.

Por identificação dos termos nas Eqs. 21 e 22 pode verificar-se que o escoamento é equivalente ao provocado por uma distribuição mista de singularidades (fontes e dipólos normais) cujas densidades são dadas por:

$$\sigma(M') = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}(M') \quad (23)$$

para as fontes e:

$$\mu(M') = \Phi(M') \quad (24)$$

para os dipólos normais.

A Eq. 21, é uma equação de Fredholm de segunda espécie e a Eq. 22 de primeira, o que permite a utilização de técnicas numéricas específicas conhecidas, Clément (1992).

O escoamento foi, portanto, estudado aplicando o método das singularidades que como se sabe, consiste na determinação da uma distribuição superficial de singularidades em F, S<sup>-</sup> e S<sup>+</sup> cinematicamente equivalente ao escoamento no domínio D.

### 2.2.1 Método numérico de resolução

A discretização da fronteira consiste na sua substituição por segmentos de recta com início e fim em nós consecutivos. Sobre cada um destes segmentos existem, duas distribuições lineares de singularidades, uma de fontes e outra de dipólos normais.

Referenciando o segmento  $j(M_j, M_{j+1})$  por  $i$ , o potencial  $\Phi_i$  gerado no ponto  $M_i$ , em consequência das suas distribuições lineares de fontes e de dipólos normais, é dado segundo Guevel (1977) e Clément (1991) por:

$$\Phi_i = \text{Re}[\sigma_j s(M_i, M_j, M_{j+1}) - \sigma_{j+1} s(M_i, M_{j+1}, M_j)] \quad (25)$$

com:

$$\begin{aligned} & s(M_i, M_j, M_{j+1}) = s_{i,j,j+1} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| Z_{j+1} - Z_j \right| \left[ \frac{Z_j - 3Z_{j+1} - 2Z_i}{4(Z_j - Z_{j+1})} + \frac{1}{2} \frac{(Z_{j+1} - Z_i)^2}{(Z_{j+1} - Z_j)^2} \log \frac{Z_i - Z_{j+1}}{Z_i - Z_j} + \frac{1}{2} \log(Z_i - Z_j) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

para o potencial gerado pela distribuição linear de fontes, e:

$$\Phi_i = \mu_j d(M_i, M_j, M_{j+1}) - \mu_{j+1} d(M_i, M_{j+1}, M_j) \quad (27)$$

com:

$$d(M_i, M_j, M_{j+1}) = d_{i,j,j+1} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( i \frac{Z_{j+1} - Z_i}{Z_{j+1} - Z_j} \log \frac{Z_i - Z_{j+1}}{Z_i - Z_j} - 1 \right) \quad (28)$$

para o potencial gerado pela distribuição linear de dipólos normais.

Analogamente e segundo os mesmos autores a velocidade complexa,  $W = U - iV$ , gerada pelas distribuições lineares de fontes e de dipólos normais no ponto  $M_i$ , é dada por:

$$W_i = \sigma_j s'(M_i, M_j, M_{j+1}) - \sigma_{j+1} s'(M_i, M_{j+1}, M_j) \quad (29)$$

com:

$$s'(M_i, M_j, M_{j+1}) = s'_{i,j,j+1} = \frac{1}{2\pi} \frac{|Z_{j+1} - Z_j|}{Z_{j+1} - Z_j} \left[ \frac{Z_i - Z_{j+1}}{Z_{j+1} - Z_j} \log \frac{Z_i - Z_{j+1}}{Z_i - Z_j} + 1 \right] \quad (30)$$

para a velocidade complexa gerada pela distribuição linear de fontes, e:

$$W_i = \mu_j d'(M_i, M_j, M_{j+1}) - \mu_{j+1} d'(M_i, M_{j+1}, M_j) \quad (31)$$

com:

$$d'(M_i, M_j, M_{j+1}) = d'_{i,j,j+1} = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{1}{Z_i - Z_j} - \frac{1}{Z_{j+1} - Z_j} \log \frac{Z_i - Z_{j+1}}{Z_i - Z_j} \right) \quad (32)$$

para a velocidade complexa gerada pela distribuição linear de dipólos normais.

A discretização por esta via das Eqs. 21 e 22 conduz-nos a um sistema linear de  $n$  equações algébricas a  $n$  incógnitas. As incógnitas são, evidentemente, as densidades de fontes  $\sigma_i$  e de dipólos normais  $\mu_i$  em cada nó. Este sistema foi resolvido utilizando uma algoritmo iterativo GMRES pré-condicionado, Saad e Schultz(1986).

A integração das Eqs. 12, 14 e 15 é agora possível, permitindo a actualização em cada passo de tempo da deformada da superfície livre e das condições impostas pelo estado de repouso ou movimento dos batedores. Esta integração foi efectuada utilizando um método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Na Figura 2 resume-se o algoritmo do código CANAL.

As simulações são obrigatoriamente iniciadas a partir do estado de repouso. No final de uma simulação ficam assim acessíveis, em cada passo de tempo, as variáveis adimensionais:

- posição  $(X, Y)$  dos nós de toda a fronteira;
- densidade de singularidades ( $\sigma_i$  e  $\mu_i$ ) em todos os segmentos da fronteira.

A utilização de rotinas numéricas simples, do tipo "sonda numérica" permite obter a deformada de superfície livre num dado ponto do canal a partir das posições da superfície livre calculadas em cada passo de tempo.

Foram adicionados à versão base do programa vários módulos que permitem calcular a velocidade das partículas e a pressão em qualquer ponto do domínio, Gil (1999). Um outro módulo, com especial interesse para este trabalho, efectua a absorção dinâmica ou numérica das ondas nas extremidades do canal, o que permite simular situações correspondentes a condições fronteira de radiação. O canal numérico pode então ser considerado como uma zona finita de um canal de comprimento infinito. O método de absorção integrado neste código é original e consiste na inserção dos conceitos de "pistão absorvor" e de "praia de dissipação numérica" anteriormente estabelecidos por Clément (1996).

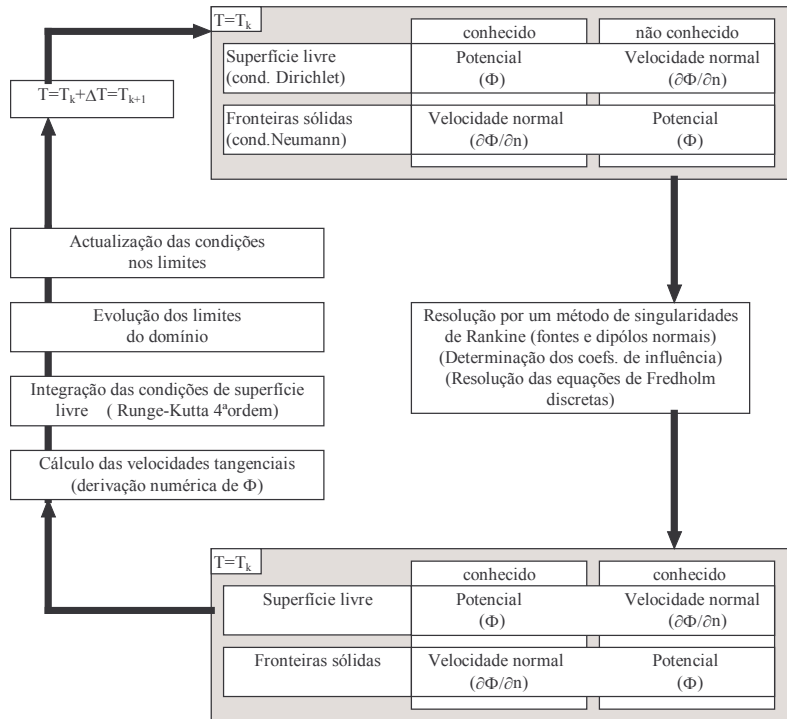


Figura 2 - O algoritmo de CANAL.

### 3. CONDIÇÕES DE CÁLCULO

#### 3.1 Modelo CANAL

Nos ensaios efectuados com o código CANAL simula-se uma zona dsemi-infinita de um canal bidimensional utilizando grandezas adimensionais. A utilização de grandezas adimensionais permite considerar um domínio de cálculo, no qual a onda evolui desde o limite das águas de profundidade finita até águas pouco profundas, sendo a simulação independentemente do período das ondas. Na Figura 3 representam-se as dimensões da zona simulada.

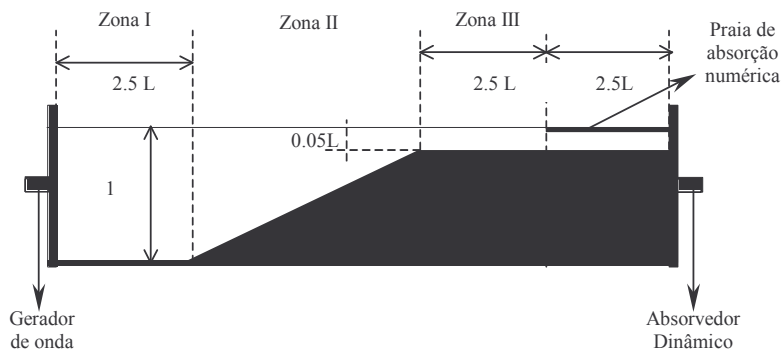


Figura 3 – Domínio de cálculo adimensionalizado por  $l_\infty/2$ , para o modelo CANAL.



A escolha de metade do comprimento de onda, definido em águas profundas,  $l_{\infty}/2$ , para adimensionalizar as grandezas geométricas conduz a um canal que tem por profundidade máxima adimensional a unidade. Desta forma, fica garantido que a onda é gerada e inicia a sua propagação nas condições limite de profundidade infinita. O fundo inclinado termina numa plataforma horizontal com profundidade adimensional de  $0.05L_{\infty}$ . Esta plataforma está dividida em duas zonas de igual comprimento,  $2.5L_{\infty}$ . Na segunda zona está instalada uma praia de absorção numérica que em conjunto com o absorvedor dinâmico evita que exista reflexão para o interior do domínio. Desta forma, simula-se uma condição fronteira de radiação.

Note-se que esta formulação adimensional permite uma fácil generalização dos resultados. A relação de dispersão, que para profundidade infinita e na forma dimensional escreve-se:

$$l_{\infty} = \frac{g}{2\pi} t^2 \quad (33)$$

pode ser dividida pela profundidade inicial do canal,  $h$ , obtendo-se:

$$t \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{l_{\infty}}{h}} \quad (34)$$

De acordo com a Eq. 8, e com a escolha efectuada de adimensionalizar a profundidade por  $l_{\infty}/2$ , a equação precedente transforma-se em:

$$T = \sqrt{2\pi} \times \sqrt{\frac{l_{\infty}}{l_{\infty}/2}} = 2\sqrt{\pi}. \quad (35)$$

De acordo com esta formulação, e com a geometria adimensional adoptada para o canal, todos os casos dimensionais, correspondentes à variação do período da onda, são geometricamente e dinamicamente semelhantes a uma única situação adimensional a que corresponde o período de  $2\sqrt{\pi}$ . Desta forma, nas simulações numéricas efectuadas com o código CANAL apenas se variou a altura da onda e a inclinação do fundo. Foram considerados 6 diferentes inclinações: 30/100, 24/200, 18/100, 12/100, 6/100 e 3/100; e duas alturas de onda: 0.3 m e 0.1 m.

### 3.2 Modelo DREAMS

Nos ensaios com o modelo DREAMS simula-se um canal com a geometria representada na Figura 4. Evidentemente, esta geometria impõe um escoamento bidimensional. O canal tem uma largura de 2 m e um comprimento que é variável de ensaio para ensaio,  $L_x$ .

Para facilitar os cálculos com DREAMS, não se consideraram grandezas adimensionais, como no caso do modelo CANAL. Evidentemente, as características do canal são geometricamente semelhantes às utilizadas nas simulações não-lineares já apresentadas na Figura 3.

O canal de comprimento  $L_y$ , é constituído por três troços de diferentes profundidades: os troços I e III são de profundidade constante igual a  $l_{\infty}/2$  e  $l_{\infty}/20$ , respectivamente, sendo  $l_{\infty}$  o comprimento das ondas incidentes testadas. O comprimento destes troços é de  $2.5l_{\infty}$ ; O troço II, correspondente a uma praia com inclinação constante, efectua a transição do trecho I para o III. Foram consideradas as mesmas 6 inclinações para o troço II que no caso das simulações com o modelo CANAL: 30/100, 24/200, 18/100, 12/100, 6/100 e 3/100.

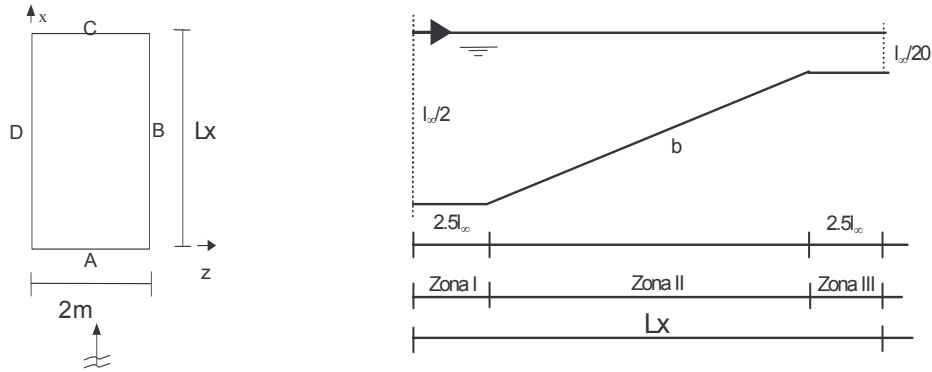


Figura 4 – Geometria e batimetria considerada no modelo DREAMS.

Os cálculos de propagação de onda com o modelo DREAMS são efectuados para uma onda sinusoidal de período  $t=5$  s e direcção de  $90^\circ$ . Note-se que o modelo é linear, pelo que não é influenciado pela altura da onda.

Na aplicação do modelo DREAMS, os domínios computacionais considerados correspondentes a cada inclinação do fundo, são discretizados por uma malha de elementos finitos, cujo espaçamento em  $x$  ou em  $z$  é de 0.2 m. Para todos os períodos testados, considerou-se que a onda incidente é imposta na fronteira A. Na fronteira C, admite-se uma condição de radiação, enquanto que nas fronteiras B e D, admite-se uma condição de reflexão total. No entanto, como o sentido de propagação da onda é colinear com estas fronteiras, a reflexão pode ser desprezada o que confere ao modelo características bidimensionais.

## 4. TESTES COMPARATIVOS

### 4.1 Método de comparação de resultados

A natureza do modelo linear não permite evidentemente a troca de energia entre componentes espectrais e consequentemente a onda, não obstante alterar o seu comprimento e celeridade na zona de profundidade variável, mantém a forma sinusoidal em todo o domínio. Tal não acontece com o código não-linear. Com efeito, CANAL permite simular a transformação do perfil da onda com a variação da profundidade. Do ponto de vista dos modelos matemáticos, na zona de maior profundidade, é válida a teoria de Stokes sendo a teoria cnoidal das ondas mais ajustada na zona de menor profundidade.

No âmbito deste trabalho, pretende-se estudar a evolução do índice de agitação, para tal é necessário medir a amplitude da onda. Como referido, nas simulações não-lineares obtêm-se ondas que não apresentam uma forma permanente durante a sua propagação. Foi assim necessário definir uma grandeza que permitisse comparar os dois modelos, ou seja comparar ondas sinusoidais “puras” com ondas não sinusoidais. Com este objectivo, utilizou-se a amplitude eficaz,  $a_{ef}$ , que corresponde à amplitude da onda sinusoidal que melhor se aproxima do ponto de vista da energia, da onda obtida através do modelo não-linear:

$$a_{ef} = \sqrt{\frac{\sum_{n=n_i}^{n=n_f} \eta_n^2}{\sum_{n=n_i}^{n=n_f} \sin^2\left(\frac{2\pi}{t} t_n\right)}} \quad (36)$$

onde:

$\eta$ - deformada de superfície livre

t - Período fundamental da onda.

A partir do sinal obtido por uma sonda numérica colocada em qualquer posição do canal, entre os passos de tempo  $n_i$  e  $n_f$ , e da Eq. 36, obtém-se a amplitude eficaz da onda sendo a comparação com o modelo linear imediata.

No caso do modelo linear DREAMS, o índice de agitação é uma saída automática do programa e é calculado, simplesmente, pela relação entre a altura de onda num ponto do domínio, H, e a altura de onda à entrada do domínio,  $H_0$ .

## 4.2 Resultados

Os modelos CANAL e DREAMS foram aplicados para as condições descritas no Capítulo 3. Através do modelo DREAMS, obteve-se o valor do índice de agitação em todos os nós do domínios de cálculo. Para o modelo CANAL, analogamente ao que se passa num canal físico, é necessário colocar uma sonda para obter a deformada de superfície livre. A partir deste resultado, calcula-se através da Eq. 36 a altura eficaz da onda e conseqüentemente o índice de agitação.

Desta forma, os resultados do modelo DREAMS são representados através de curvas contínuas enquanto os do modelo CANAL por valores discretos.

Da Figura 5 à Figura 7 apresentam-se os valores do índice de agitação ao longo do canal, para os valores da inclinação do fundo considerados e no caso não-linear para as duas alturas de onda testadas. Estes resultados são comparados com a expressão do coeficiente de empolamento,  $K_s$ , obtido via teoria linear. Este coeficiente é função do número da onda,  $k$ , e da profundidade do fundo,  $h$ , e é dado por:

$$K_s = \frac{\cosh(kh)}{\sqrt{kh + \sinh(kh) \cosh(kh)}} \quad (37)$$

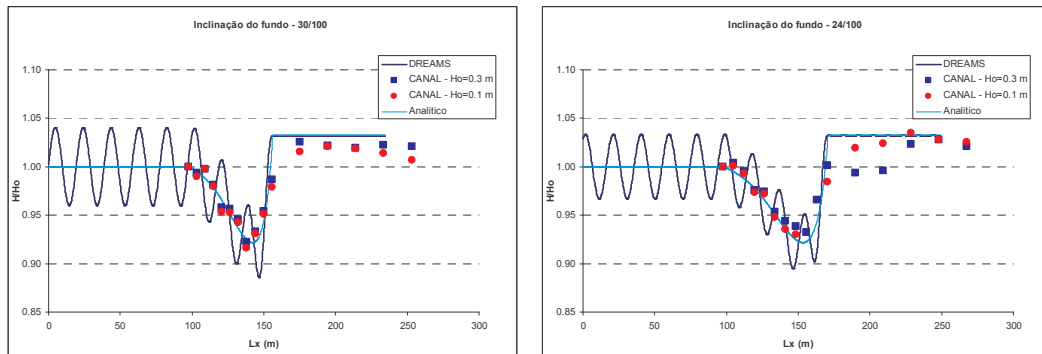


Figura 5 – Declives de praia 30/100 e 24/100. Comparação de resultados numéricos e analíticos.  $t = 5$  s.

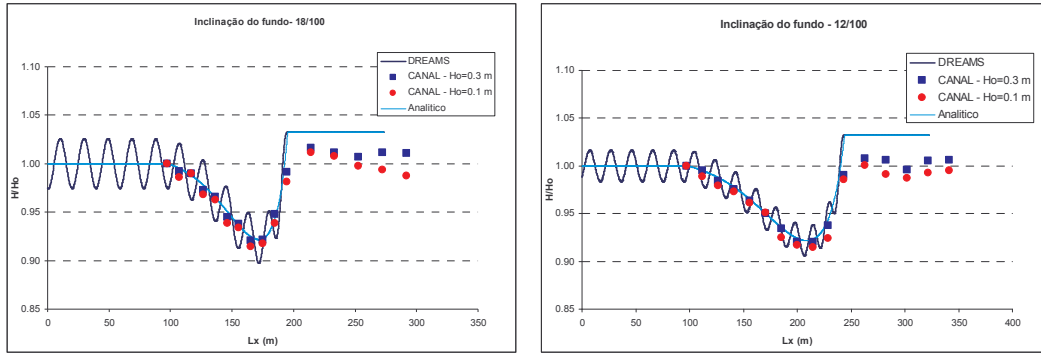


Figura 6 – Declives de praia 18/100 e 12/100. Comparação de resultados numéricos e analíticos.  $t = 5$  s.

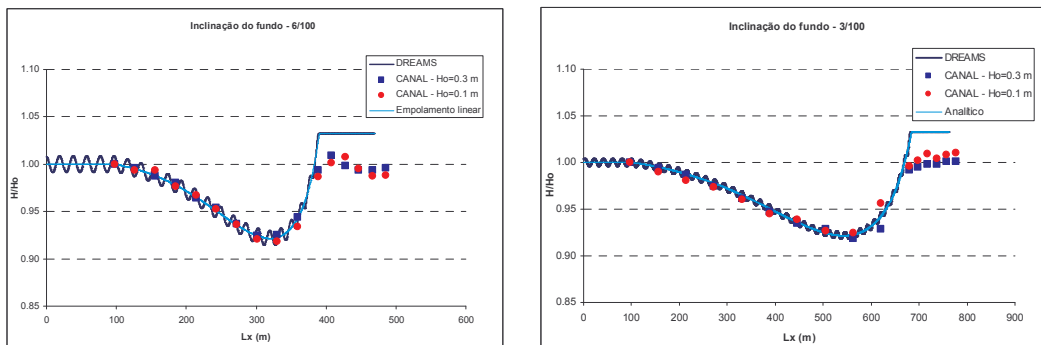


Figura 7 – Declives de praia 6/100 e 3/100. Comparação de resultados numéricos e analíticos.  $t = 5$  s.

A análise global das figuras anteriores permite constatar que existe uma concordância satisfatória entre resultados dos modelos numéricos e a solução analítica linear. Com efeito, verifica-se o mesmo andamento e a mesma ordem de grandeza entre ambos os resultados numéricos e nos analíticos.

Os resultados obtidos com o modelo linear DREAMS, apresentam oscilações nos troços I e II, no entanto, no troço III, o índice de agitação permanece constante. Estas oscilações estão certamente ligadas à reflexão no fundo. Resultados semelhantes, já foram obtidos em Fortes (1993). Como se observa nas figuras, à medida que a inclinação do fundo aumenta, a reflexão é mais importante e, por conseguinte, as oscilações tornam-se mais significativas. Não obstante, a amplitude das oscilações parece exagerada quando comparada com os resultados não-lineares, pois estes também são obtidos tendo em conta a reflexão no fundo. Recorde-se que o resultado analítico é obtido por conservação do fluxo energético, desprezando a reflexão.

A comparação dos resultados não-lineares com os analíticos permite constatar que os efeitos não-lineares têm pequena influência no empolamento da onda. Apenas na zona de transição entre o fundo inclinado e a praia de profundidade constante são observáveis diferenças sistemáticas entre os dois modelos. A forma como é feita a concordância entre o fundo inclinado e a praia plana tem grande influência na alteração da agitação nesta zona, Didier *et al.* (2003). Assim, qualquer quantificação das diferenças entre modelos lineares e não-lineares nesta região terá de ser feita em função do tipo de concordância adoptado.

No que diz respeito à influência da altura da onda no índice de agitação, observa-se que a dependência é fraca. Com efeito, apenas uma comparação fina entre os resultados obtidos para as ondas de 0.3 m e 0.1 m permite concluir que o índice de agitação é ligeiramente superior para a onda de maior amplitude. Note-se que o aumento deste efeito não pode ser

significativo uma vez que a altura da onda não pode crescer indefinidamente pois está limitada pelo fenómeno da rebentação.

A semelhança entre os resultados obtidos através dos modelos numéricos e os desenvolvimentos analíticos no que diz respeito ao índice de agitação, não deve ser generalizada a todas as características da onda. Com efeito, no que diz respeito à forma da deformada da superfície livre, os modelos linear e não-linear conduzem a resultados significativamente diferentes. Na Figura 8, representa-se a deformada de superfície livre, obtida através do modelo CANAL, relativa às ondas monocromáticas de período  $t= 5$  s e altura de onda 0.3 m. Evidentemente, com o modelo DREAMS, obtém-se para deformada uma curva de características sinusoidais onde apenas o comprimento e a altura da onda variam ao longo da direcção de propagação.

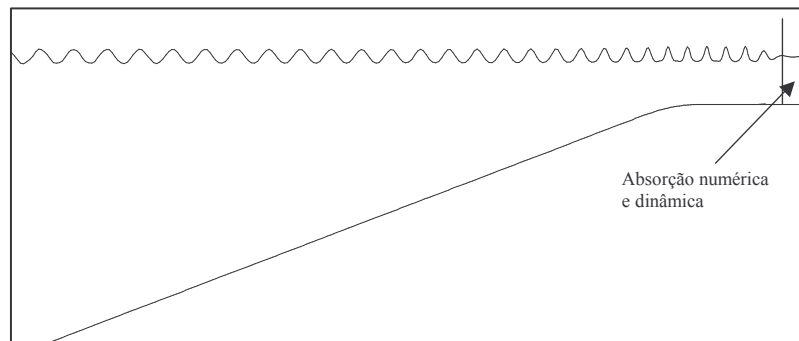


Figura 8 – Deformada da superfície livre obtida com o modelo CANAL.

Da Figura 8, verifica-se que existe uma boa concordância da forma da superfície livre, calculada pelos dois modelos no troço I, o qual corresponde à zona de profundidade infinita. Nesta zona, são aceitáveis as hipóteses do modelo linear. À medida que a onda se propaga nos troços II e III, verificam-se diferenças cada vez mais importantes entre a forma da superfície livre calculada por CANAL e a calculada por DREAMS. Note-se que no final do troço II e no troço III a onda tem uma forma cnoidal, isto é, cristas muito aguçadas e cavas achatadas. Estas formas não podem ser obtidas por um modelo linear.

O tempo de cálculo necessário aos códigos linear e não-linear depende essencialmente da complexidade dos modelos matemáticos sobre os quais foram construídos. Efectivamente a duração das simulações efectuadas por cada um dos códigos diferem em várias ordens de grandeza. Nos ensaios efectuados com o modelo CANAL, com o fundo menos inclinado, (a que correspondem os domínios de maior dimensão), foi necessário um tempo de cálculo da ordem das 24 horas. O meio informático utilizado foi um Pc, Pentium III com 1GHz e com 256 Mo de memória. Para efectuar a mesma simulação, o modelo DREAMS necessitou apenas de um tempo de cálculo da ordem de 1 minuto.

## 5. CONCLUSÕES

Nesta comunicação, descreveram-se os modelos linear, DREAMS, e não-linear, CANAL, de propagação de ondas marítimas em fundos de inclinação suave. DREAMS é um modelo de elementos finitos que se baseia na equação de declive suave, Berkhoff (1972), enquanto que CANAL é um modelo totalmente não-linear que resolve a equação de Euler pelo método dos elementos de fronteira.

Os modelos foram aplicados na simulação da propagação de ondas num canal com um fundo de inclinação constante. Foram testadas várias inclinações de fundo e alturas de onda incidente. A comparação dos resultados dos dois modelos, em termos do índice de agitação, permitiu concluir que:

- O andamento e a ordem de grandeza dos resultados numéricos e analíticos é muito semelhante para quaisquer das condições testadas (períodos de onda e declives de fundo);
- No caso do modelo linear DREAMS, os resultados numéricos apresentam oscilações nos troços I e II, que são devidos à reflexão do fundo. Estas oscilações são maiores à medida que o declive aumenta;
- A principal diferença entre os resultados do modelo linear relativamente aos modelos não-linear e analítico consiste na oscilação dos valores do índice de agitação. As oscilações nos resultados obtidos por DREAMS parecem resultar de uma exagerada reflexão no fundo ou de uma deficiência na condição mista de radiação-geração imposta na fronteira de montante. Inversamente a concordância entre os resultados analíticos e as simulações lineares no troço III permite concluir que a condição de radiação na fronteira de jusante é adequada.

Em relação à deformada da superfície livre, verifica-se que:

- Existem diferenças significativas entre as deformadas calculadas pelos dois modelos numéricos que se acentuam à medida que a profundidade diminui;
- No troço III, a onda apresenta características não-lineares (cristas aguçadas e cavas achatadas) que apenas um modelo não-linear consegue modelar. Nesta zona, a presença de ondas livres e o aparecimento de agitação típica de águas pouco profundas torna desajustadas as hipóteses fundamentais da teoria linear.

As diferenças entre os resultados obtidos e entre as ordens de grandeza dos tempos de cálculo, indicam que a opção por um dos códigos deve ser feita tendo em conta os objectivos do estudo.

Para situações típicas de pré-projecto, como as que ocorrem paralelamente à elaboração do caderno de encargos de uma obra, o estudo preliminar deverá ser feito com um código linear. Não obstante no projecto de obras costeiras, a opção por um código linear continua válida na generalidade dos casos.

Em situações em que seja necessário um conhecimento mais profundo das características da agitação, nomeadamente aquelas em que se preveja que os efeitos não-lineares desempenhem um papel importante, é recomendável o recurso a um código não-linear.

Estudos adicionais devem ser realizados com batimetrias complexas de modo a avaliar as potencialidades do modelo CANAL comparativamente aos modelos lineares.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos técnicos experimentadores Franklin Carvalho e Branca Branco pelo apoio na revisão do texto. Os autores agradecem o apoio financeiro concedido através dos projectos da FCT, PDCTM /P/MAR/15239/1999, POCTI /2.1/TPAR/2082/95, POCTI/C/ECM/12100/98.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Berkhoff, J.C.W. (1972) "Computation of combined refraction-diffraction". Proc. 13th International Conference in Coastal Engineering, Vancouver, Canada, Vol. 2, pp. 471-490.
- Booij, N. (1983) "A note on accuracy of the *mild-slope* equation". *Coastal Engineering*, Vol. 7, pp. 191-203.
- Clément A. (1991) "Hydrodynamique instationnaire non-linéaire bidimensionnelle". Rapport LHN 9004 1ère partie E.N.S.M.

- Clément A. (1992) "Hydrodynamique instationnaire non-linéaire bidimensionnelle". Rapport LHN 9004 2ème partie E.N.S.M.
- Clément, A. (1996) "Coupling of two absorbing boundary conditions for 2D time-domain simulations of free surface gravity waves". *J. Comp. Physics*, 126, 139-151.
- Delhommeau, G. (1986) "Mise en oeuvre d'une methode de singularités". Ecole centrale de Nantes.
- Didier, E., Gil, L., Clement, A. (2003) "Etude de la réflexion de la houle induite par une variation de profondeur". 9<sup>ième</sup> Journée de l'Hydrodynamique, Poitiers.
- Fortes, C.J.E.M. (1993) "Modelação matemática da refração e difração combinadas de ondas marítimas. Análise pelo método dos elementos finitos". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico.
- Gil, L. (1999) "Interações onda-onda num canal bidimensional (estudo experimental e numérico)". Tese de doutoramento em Hidrodinâmica, Ecole Centrale de Nantes e FCT-UNL.
- Guevel, P. (1977) "Methode des singularites - problème bidimensionnel". Ecole Centrale Nantes.
- Saad, Y., Schultz, M. (1986) "GMRES: a generalized minimum residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems". *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol 7, pp 856-869.
- Smith, R., Sprinks, T. (1975) "Scattering of surface waves by a conical island". *J. Fluid Mechanics*, Vol. 72, pp. 373-384.